Polynomdivision
Übung

1. Führen Sie die Polynomdivision durch:

   a) $(2x^3 + 9x^2 + 10x + 3) : (x + 3)$

   b) $(x^3 - x^2 - 5x + 5) : (x - 1)$

   c) $(x^3 + 8) : (x + 2)$

   d) $(x^3 + 6x^2 + 13x + 10) : (x + 2)$

   e) $(x^3 - 8x^2 + 16x - 3) : (x - 3)$

   f) $(6x^4 - 15x^3 + 4x^2 - 8x - 5) : (2x - 5)$

   g) $(x^4 - 1) : (x^2 - 1)$

   h) $\left(x^6 + \frac{5}{2}x^5 + \frac{7}{2}x^4 + 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) : (2x^2 + x + 1)$

2. Führen Sie die Polynomdivision mit Rest durch:

   a) $(x^4 - 7x^2 + x - 1) : (x - 2)$

   b) $(x^3 - 7x^2 + x + 5) : (x^2 + 2x - 1)$

   c) $(x^3 - x^2 + x - 3) : (x - 1)$

   d) $(x^3 + x^2 + 3) : (x + 1)$

   e) $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 5) : (2x - 3)$

   f) $(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (x^2 + 3)$

3. Zerlegen sie die Polynome soweit möglich!

   a) $p_1(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ [Hinweis: $p_1(-1) = 0$]

   b) $p_2(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

   c) $p_3(x) = x^3 - 2x^2 + x$

   d) $p_4(x) = x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 84x - 80$

4. Vergleichen Sie die Schritte der gewöhnlichen schriftlichen Division am Beispiel $2998 : 14$ mit der Polynomdivision von

$$(x^3 + 7x^2 + 2x - 5) : (x + 2).$$

5. Dividieren Sie und machen Sie die Probe, indem Sie umgekehrt wieder multiplizieren:

$$(x^3 + 4x^2 + 2x - 3) : (x + 3)$$

6. Welchen Ausdruck muss man durch $(x^2 - 1)$ teilen, um $(x^2 + 2)$ zu erhalten?

7. Für welches $a \in \mathbb{R}$ geht die Polynomdivision auf?

$$(x^3 - 4x^2 + ax - 8) : (x + 2)$$

8. Führen Sie die Polynomdivision $f(x) = \frac{x^2+4}{2x-4}$ durch, Sie erhalten als Ergebnis $f(x) = g(x) + r(x)$ mit einem linearen Term $g(x)$ und einem Restterm $r(x)$.
   Zeichnen Sie die Graphen von $g(x)$ sowie von $f(x) = g(x) + r(x)$ mit Hilfe einer Wertetabelle im Bereich $-3 \leq x \leq 7$.
   Welche Bedeutung hat demnach $g(x)$ für den Graphen von $f(x)$?

Polynomdivision
Lösung

1.
a) $(2x^3 + 9x^2 + 10x + 3) : (x + 3) = 2x^2 + 3x + 1$
b) $(x^3 - x^2 - 5x + 5): (x - 1) = x^2 - 5$
c) $(x^3 + 8): (x + 2) = x^2 - 2x + 4$
d) $(x^3 + 6x^2 + 13x + 10): (x + 2) = x^2 + 4x + 5$
e) $(x^3 - 8x^2 + 16x - 3): (x - 3) = x^2 - 5x + 1$
f) $(6x^4 - 15x^3 + 4x^2 - 8x - 5): (2x - 5) = 3x^3 + 2x + 1$
g) $(x^4 - 1): (x^2 - 1) = x^2 + 1$
h) $\left(x^6 + \frac{5}{2}x^5 + \frac{7}{2}x^4 + 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right): (2x^2 + x + 1) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x$

2.
a) $(x^4 - 7x^2 + x - 1): (x - 2) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5 - \frac{11}{x-2}$
b) $(x^3 - 7x^2 + x + 5): (x^2 + 2x - 1) = x - 9 + \frac{20x-4}{x^2+2x-1}$
c) $(x^3 - x^2 + x - 3): (x - 1) = x^2 + 1 - \frac{2}{x-1}$
d) $(x^3 + x^2 + 3): (x + 1) = x^2 + \frac{3}{x+1}$
e) $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 5): (2x - 3) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{19}{8}x + \frac{89}{16} + \frac{187}{16(2x-3)}$
f) $(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5): (x^2 + 3) = x^2 + 3x - 1 + \frac{-12x+8}{x^2+3}$

3.
a) $p_1(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$
b) $p_2(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)$
c) $p_3(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x - 1)^2$
d) $p_4(x) = x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 84x - 80 = (x + 2)^2(x + 4)(x - 5)$

4. $2998: 14 = 214\frac{2}{14}$ und $(x^3 + 7x^2 + 2x - 5): (x + 2) = x^2 + 5x - 8 + \frac{11}{x+2}$

5. $(x^3 + 4x^2 + 2x - 3): (x + 3) = x^2 + x - 1$
Für die Probe muss das Produkt $(x^2 + x - 1) \cdot (x + 3)$ den Wert $x^3 + 4x^2 + 2x - 3$ ergeben, was auch der Fall ist.

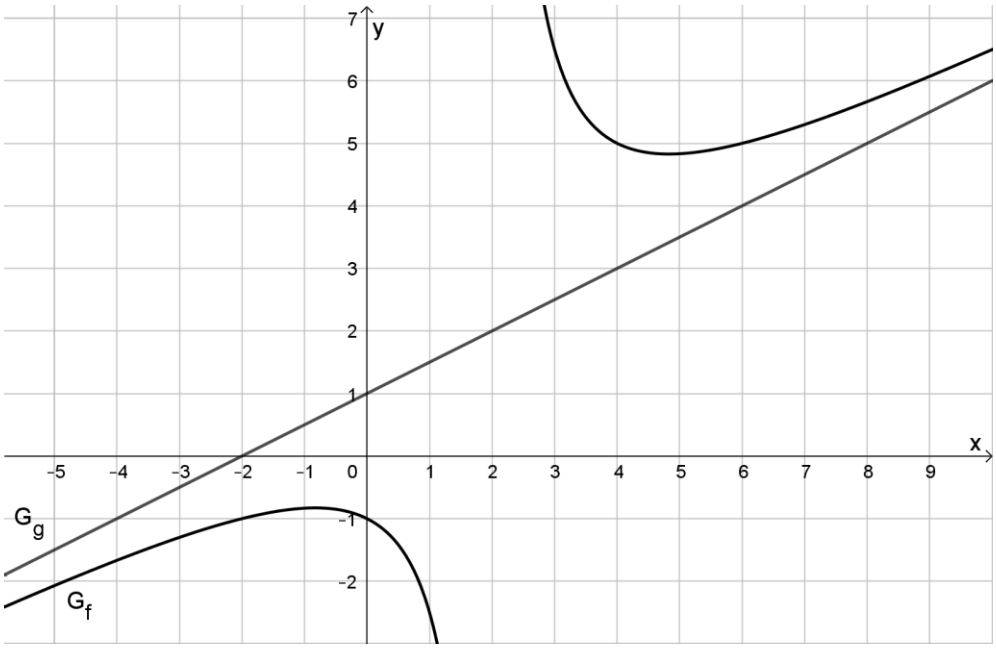
6. Es ist $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) = x^4 + x^2 - 2$,
daher ist umgekehrt auch $(x^4 + x^2 - 2): (x^2 - 1) = x^2 + 2$

7. $(x^3 - 4x^2 + ax - 8): (x + 2) = x^2 - 6x + (a + 12) + \frac{-2a-16}{x+2}$.
Damit sich kein Rest ergibt, muss $-2a - 16 = 0$ sein, also $a = -8$.

8. $(x^2 + 4) : (2x - 4) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{8}{2x-4}$

Damit ist der ganzrationale Anteil $g(x) = \frac{1}{2x} + 1$

und der Restterm $r(x) = \frac{8}{2x-4} = \frac{4}{x-2}$.



Der Graph von g stellt eine Asymptote zum Graphen von f dar, d.h. eine Gerade, der sich der Graph G_g annähert.